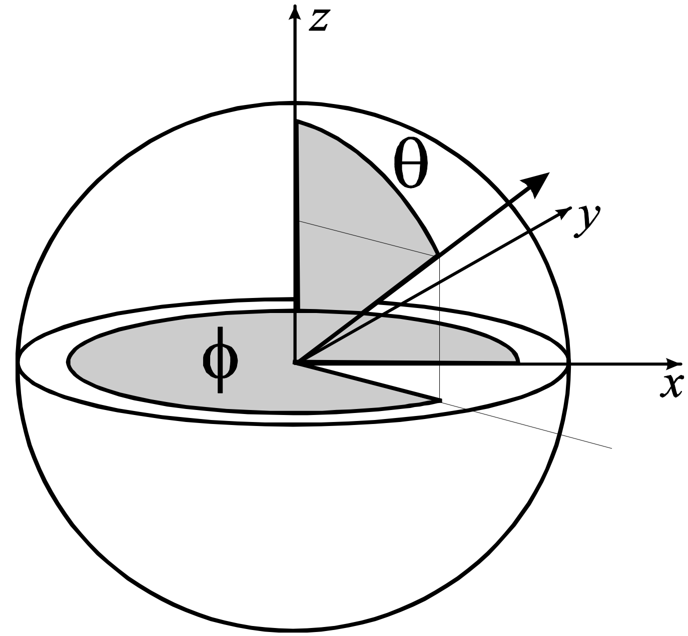
Počítačová grafika III - Cvičení Integrovávíví na jednotkové kouli

Jaroslav Křivánek, MFF UK

Jaroslav.Krivanek@mff.cuni.cz

Směr, prostorový úhel, integrování na jednotkové kouli

Směr ve 3D



- **Směr** = jednotkový vektor ve 3D
  - Kartézské souřadnice

$$\omega = [x, y, z], \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

  - Sférické souřadnice

$$\omega = [\theta, \varphi]$$

$$\theta \in [0, \pi] \qquad \theta = \arccos z \qquad x = \sin\theta \cos\varphi$$

$$\varphi \in [0, 2\pi] \qquad \varphi = \arctan \frac{y}{x} \qquad y = \sin\theta \sin\varphi$$

$$z = \cos\theta$$

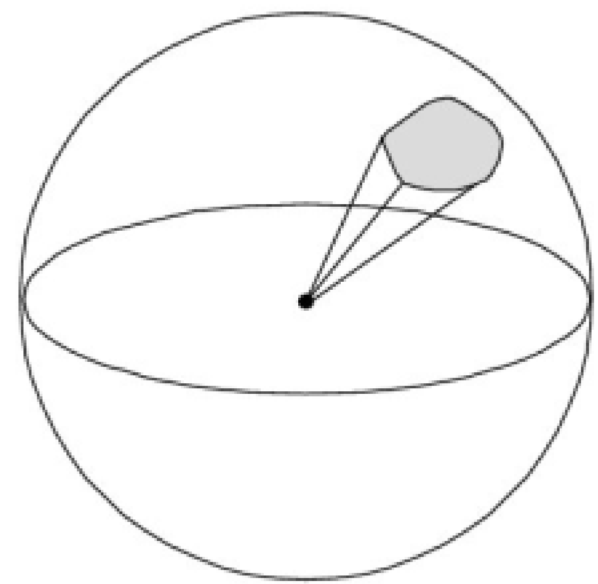
  - θ … *polární úhel* - odchylka od osy *Z*
  - ϕ … *azimut* - úhel od osy *X*

Funkce na jednotkové kouli

- Funkce jako každá jiná, ale argumentem je směr ve 3D
- Funkční hodnota je číslo (nebo třeba trojice čísel RGB)
- Zápis např.
  - $F(\omega)$
  - $F(x,y,z)$
  - $F(\theta,\phi)$
  - …
  - Závisí na zvolené reprezentaci směrů ve 3D

Prostorový úhel

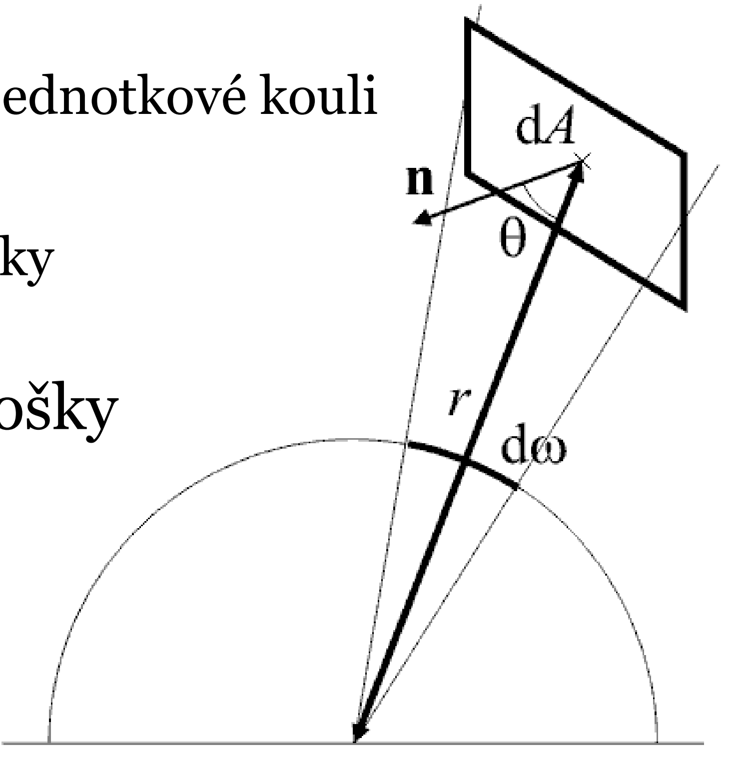
- **Rovinný úhel**
  - Délka oblouku na jednotkové kružnici
  - Kružnice má 2π radiánů
- **Prostorový úhel** (steradian, sr)
  - Velikost plochy na jednotkové kouli
  - Koule má 4π steradiánů



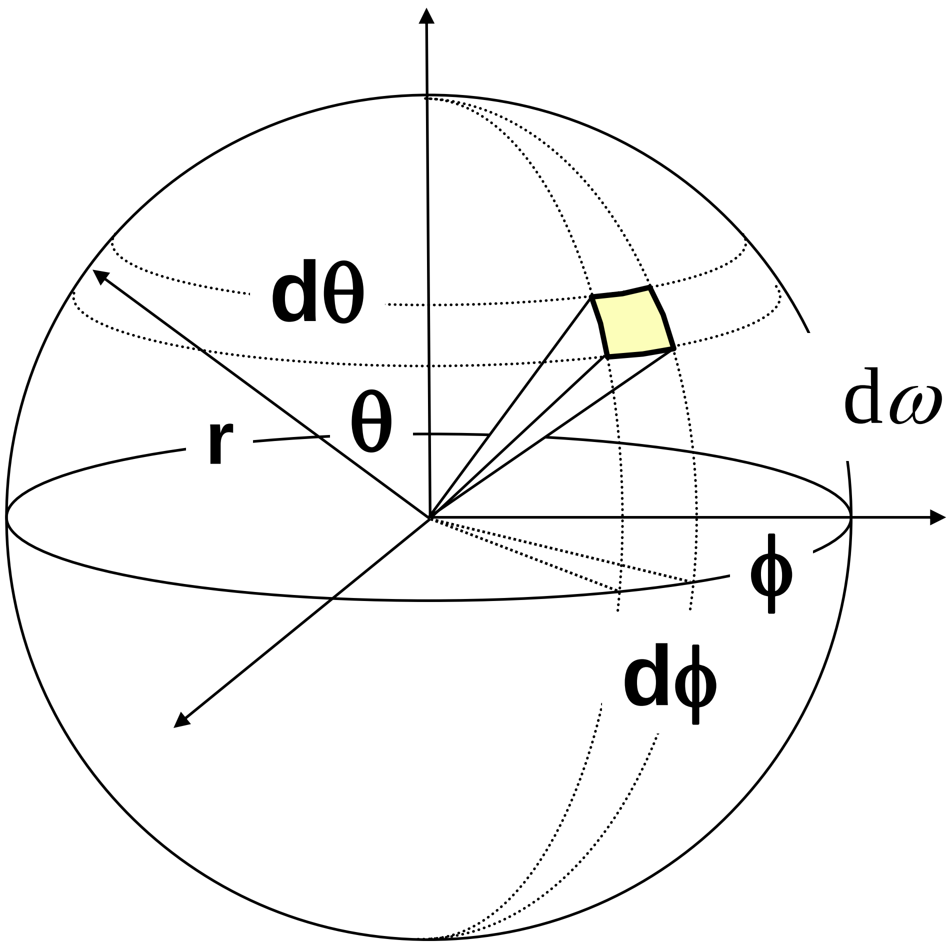
Diferenciální prostorový úhel

- „Nekonečně malý“ prostorový úhel okolo směru
- 3D vektor
  - Velikost dω
    - velikost diferenciální plošky na jednotkové kouli
  - Směr dω
    - střed projekce diferenciální plošky na jednotkovou kouli
- Prostorový úhel diferenciální plošky

$$\boxed{d\omega = dA \frac{\cos\theta}{r^2}}$$



Diferenciální prostorový úhel



$$d\omega = (d\theta)\,(\sin\theta\, d\phi)$$
$$= \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

Příklady

- Spočítejte velikost povrchu jednotkové koule.
- Spočítejte velikost povrchu kulového vrchlíku o úhlu θ_o.
- Spočítejte velikost povrchu kulového pásu mezi úhly θ_o a θ_1.
- Spočítejte velikost povrchu „melounu“ o úhlu ϕ_o.

Příklady

- Pod jakým prostorovým úhlem pozorujeme (nekonečnou) rovinu z bodu mimo tuto rovinu?
- Pod jakým prostorovým úhlem pozorujeme kouli o poloměru R, jejíž střed je vzdálen D od stanoviště?